

Flambement capillaire d'une couronne

Miguel Piñeirua^{a,b}, Nana Tanaka^c, Benoît Roman^a, José Bico^a

a. PMMH-ESPCI-ParisTech, 75231 Paris Cedex 05, France

b. ENSTA-ParisTech, UME, 91761 Palaiseau Cedex, France

c. Department of Physics, Ochanomizu University, Bunkyo, Tokyo 112-8610, Japan

Résumé :

Nous décrivons le flambement hors du plan d'un anneau flexible flottant sur un bain de liquide lorsque du tensio-actif est ajouté à l'extérieur de l'anneau. Le contraste en tension de surface induit une contrainte compressive et conduit à l'apparition de rides orthoradiales au-delà d'un contraste seuil. Le nombre d'onde demeure constant dans la gamme de nos paramètres expérimentaux et ne dépend que d'un équilibre entre la gravité et la rigidité en flexion de la membrane. Nous proposons une description analytique du phénomène qui complète les bases théoriques développées dans d'autres régimes.

Abstract :

We describe the out-of-plane buckling of a flexible annulus floating on a bath of water as surfactant molecules are added outside the annulus. The contrast in surface tension induces compressive stresses, which results into regular orthoradial wrinkles beyond a critical difference in surface tension. Within the range of our experimental parameters, the wave number remains constant and relies on a simple balance between gravity and the bending stiffness of the membrane. We propose an approximate analytical description that tends to complete the existing theoretical grounds for other regimes.

Mots clefs : Plaques minces ; instabilités ; capillarité

1 Des gouttes et des plis

Des expériences élégantes mises en œuvre indépendamment à l'ESPCI Paris [1] et l'université de UMass à Amherst [2] ont montré que des plis orthoradiaux apparaissaient lorsque une minuscule goutte d'eau était posée au centre d'un film mince polymère flottant à la surface d'un bain. Dans le régime étudié, le nombre de plis est dicté par un équilibre entre la tension capillaire appliquée sur la membrane et sa rigidité en flexion. La longueur des plis donne cependant une information supplémentaire sur l'équilibre entre la rigidité en tension et la capillarité. L'intérêt de ces expériences est de donner indépendamment accès à l'épaisseur de la membrane et à son module élastique. Néanmoins les conditions aux limites au voisinage de la goutte sont relativement complexes et mettent en jeu de délicates questions de lignes de contact. Afin de nous affranchir du problème de la ligne de contact, nous considérons ici des membranes trouées, c'est à dire des anneaux, de rayons intérieurs et extérieurs R_i et R_o . La compression de la membrane est ici assurée par l'ajout de molécules tensio-actives à l'extérieur de l'anneau. Le tensio-actif diminue en effet la tension externe γ_o par rapport à la tension interne γ_i . Nous observons expérimentalement la formation de rides régulières au-delà d'un seuil en différence de tension de surface. Dans le cas d'un anneau étroit (R_i et R_o du même ordre de grandeur), les rides s'étendent sur toute la largeur de l'anneau dès leur apparition. Leur amplitude augmente avec la concentration en tensio-actif alors que leur longueur d'onde demeure constante (figure 1). Cependant une trop grande concentration en tensio-actif peut engendrer l'effondrement brusque de l'anneau.

La situation est différente dans le cas d'une couronne large ($R_i \ll R_o$). En effet, la longueur des rides croît progressivement avec l'ajout de tensio-actif. Dans un premier temps, le nombre de rides demeure constant, mais des rides supplémentaires apparaissent lorsque la longueur d'onde locale des rides est trop distendue par rapport à la longueur d'onde initiale (figure 2).



FIGURE 1 – Apparition de rides orthoradiales sur un anneau étroit flottant à la surface de l’eau lorsque des molécules tensio-actives sont ajoutées à l’extérieur de l’anneau. Au delà d’une concentration de tensio-actif trop importante, l’anneau peut s’effondrer brutalement.

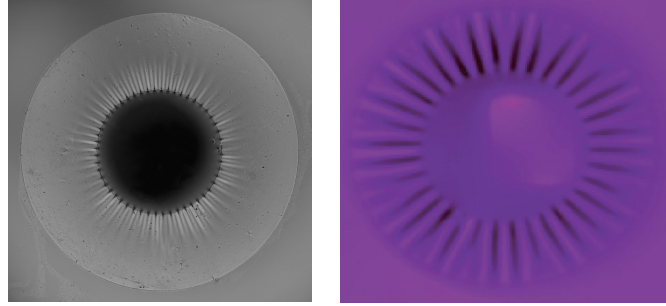


FIGURE 2 – Rides sur un anneau large ($R_i \ll R_o$). La longueur des rides croît avec la concentration de tensio-actif. Initialement constant, le nombre de rides finit par augmenter si la longueur d’onde locale des rides devient trop grande par rapport à sa longueur d’onde initiale.

2 Anneaux minces

2.1 Bande flottante

En première approximation, considérons un anneau étroit comme une bande quasi-rectiligne dont les extrémités se rejoignent. Des expériences récentes montrent que la compression d’une bande flottant à la surface de l’eau entraîne la formation de rides. Au delà du seuil de leur apparition, ces rides évoluent rapidement en un pli unique [3]. Deux ingrédients physiques entrent en jeu dans cette forme de flambement sur une base déformable : la rigidité en flexion de la bande et l’énergie de gravité de l’eau soulevée au-dessus de la surface du bain (ou enfoncée). La minimisation de ces deux énergies conduit à la longueur d’onde :

$$\lambda = 2\pi (B/\rho g)^{1/4}, \quad (1)$$

où ρ est la densité du liquide, g la constante de gravité et B le module de flexion de la bande. La force critique nécessaire au flambement est donnée par :

$$f_c = 2(\rho g B)^{1/2} w, \quad (2)$$

où w est la largeur de la membrane.

2.2 Seuil de flambement

L’intégration des forces de capillaires sur un demi-anneau conduit à une expression simple de la force de compression :

$$f_\gamma = \gamma_i R_i - \gamma_o R_o. \quad (3)$$

Cette force atteint donc la force critique de flambement pour :

$$\gamma_{oc} = \gamma_i R_i / R_o - 2(\rho g B)^{1/2} (1 - R_i / R_o), \quad (4)$$

en bon accord avec nos données expérimentales.

3 Anneaux larges

3.1 Avant flambement

Dans le cas d'un anneau large, la distribution des contraintes avant flambement est traditionnellement donnée par l'expression de Lamé [4] :

$$h\sigma_r = \gamma_\infty + (\gamma_i - \gamma_\infty) \frac{a^2}{r^2}, \quad (5)$$

$$h\sigma_\theta = \gamma_\infty - (\gamma_i - \gamma_\infty) \frac{a^2}{r^2}, \quad (6)$$

avec

$$\gamma_\infty = \frac{\gamma_o b^2 - \gamma_i a^2}{b^2 - a^2}, \quad (7)$$

où σ_r et σ_θ sont respectivement les contraintes radiales et orthoradiales.

Alors que la contrainte radiale est toujours positive, la contrainte orthoradiale peut devenir négative si $\gamma_i/\gamma_\infty > 2$. La région sous compression est alors délimitée par $R_i < r < R^*$ avec :

$$R^* = R_i(\gamma_i/\gamma_\infty - 1)^{1/2}. \quad (8)$$

La déformation bidimensionnelle d'une plaque mince est bien plus complexe que celle d'une ligne (ou d'une bande). À la lumière des résultats précédents, il semble cependant naturel de proposer comme critère de flambement, $h\sigma_\theta = -2\sqrt{\rho g B}$, au voisinage de R_i . En termes de tensions de surface, cette condition s'écrit :

$$\left(\frac{\gamma_\infty}{\gamma_i} \right)_{critic} = \frac{1}{2} - \frac{\ell_{ec}}{\ell_c}, \quad (9)$$

où la longueur *elastocapillaire* [5] et la longueur *capillaire* sont définies par rapport à γ_i , $\ell_{ec} = \sqrt{B/\gamma_i}$ et $\ell_c = \sqrt{\gamma_i/\rho g}$. Ce critère apparaît en bon accord avec nos résultats expérimentaux dans la gamme des paramètres étudiés ainsi qu'avec une résolution numérique de l'équation de Föppl von Karman qui décrit une plaque mince en faible déflexion.

3.2 Au-delà du flambement

Nous observons expérimentalement que dans un premier temps le nombre de rides est constant, ce qui implique une légère augmentation de la longueur d'onde locale lorsque l'on s'éloigne du bord intérieur. Néanmoins, la longueur *élastogravitaire* qui décrit les rides sur une bande flottante apparaît pertinente dans la situation axisymétrique, dans la limite de nos paramètres expérimentaux. En effet cette longueur décrit la longueur d'onde au voisinage du rayon intérieur. Une extension trop importante de la longueur d'onde locale conduit en outre à la ramification de rides (figure 2).

Pouvons nous enfin décrire l'évolution de la longueur des rides au voisinage du seuil de flambement ? Un critère naturel consiste à considérer qu'après leur apparition, les rides s'étendent sur toute la région comprimée de la feuille. Dans ces conditions, la longueur des plis est donnée par :

$$L_{wc} = a \left[\left(\frac{1/2 + \ell_{ec}/\ell_c}{1/2 - \ell_{ec}/\ell_c} \right)^{1/2} - 1 \right], \quad (10)$$

Malgré son caractère très simplificateur, ce critère rend compte quantitativement des résultats expérimentaux dans la gamme de nos paramètres physiques.

4 Conclusions

Nos résultats préliminaires encouragent une étude théorique et expérimentale plus profonde de la compression de films minces posés sur un bain. En effet, le seuil de flambement, la longueur d'onde des plis et la longueur de ces plis semblent bien décrits par des arguments simples qui ne sont pas rigoureusement justifiés. La gamme des paramètres physiques de nos expériences est relativement

limitée. En particulier la gravité est prépondérante devant la tension de la membrane par capillarité (c'est-à-dire $\ell_c \ll \ell_{ec}$) Nous attendons un comportement différent dans le cas opposé correspondant aux expériences de gouttes posées sur des film minces qui a initialement motivé notre étude. En particulier, la longueur *élastogravitaire* ℓ_{eg} ne devrait plus jouer un rôle prépondérant et dicter la longueur d'onde des rides dans ce second régime. Nous attendons qu'une description *far from threshold* [6] soit plus adaptée pour décrire ce régime. La transition entre les deux situations reste néanmoins à être explorée expérimentalement.

Références

- [1] Bodiguel, H. 2006 PhD thesis, Université Pierre & Marie Curie.
- [2] Huang, J., Juskiewicz, M., de Jeu, W., Cerda, E., Emrick, T., Menon, N., Russell, T. 2007 *Science*, **317** 650–653.
- [3] Pocivavsek, L., Dellsy, R., Kern, A., Johnson, S., Lin, B., Lee, K.Y.C, Cerda, E. 2008 *Science*, **320** 912–916.
- [4] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. 1959 Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, Singapore.
- [5] Roman, B., Bico, J. 2010 *J. Phys. Condens. Matter*, **22** 493101.
- [6] B. Davidovitch, R. Schroll, M. Adda-Bedia and E. Cerda 2011 *PNAS*, **108** 18227-18232.